Topologia

Lista 0 (przestrzenie metryczne z „życia wzięte”)

Zad 1. Niech X będzie powierzchnią Ziemi. Niech $d(x, y)$ oznacza odległość „w locie ptaka” między dwoma punktami $x, y \in X$, natomiast $d_e(x, y)$ oznacza odległość rozumianą jako długość odcinka łączącego dwa punkty $x, y \in X$. Uzasadnić, że zarówno d jak i d_e są metrykami w zbiorze X. Jakie największe wartości te metryki mogą przyjmować?

Zad 2. Niech X oznacza zbiór miast wojewódzkich w Polsce. Niech $d_1(x, y)$ oznacza kolejową, a $d_2(x, y)$ drogową odległość między miastami x, y. Czy funkcje d_1, d_2 są metrykami?

Zad 3. Rozważmy inwestycję o cyklu projektowania wynoszącym N lat. Niech X będzie zbiorem potencjalnych wypłat w kolejnych latach. Jako miarę odchylenia zysków uzyskanych $x = (x_1, ..., x_N)$ od zysków planowanych $y = (y_1, ..., y_n)$ przyjmujemy

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{N} |x'_n - y'_n|,$$

gdzie x'_n i y'_n są zdyskonwanymi na dzień dzisiejszy kwotami x_n, y_n.

a) Wykazać, że d jest metryką w X.

b) Firma planuje w trzech kolejnych latach osiągnąć następujące zyski: 0 PLN, 1 mln PLN oraz 2 mln PLN. Przy czym dopuszcza się, że wskaźnik odchylenia będzie mniejszy niż 1 mln, a stopa procentowa będzie stała i wynosić będzie 10%. Wyznaczyć wszystkie dopuszczalne wektory wypłat.

Zad 4. Zadaniem analityka pewnego banku jest codzienne porównywanie notowań spółek na warszawskiej giełdzie. Jako miarę odchylenia dwu notowań $x(t)$, $y(t)$ zmieniających się w czasie $t \in [9:00, 16:30]$ (czyli w czasie otwarcia giełdy) przyjmujemy wskaźnik

$$d(x, y) = \sup_{t \in [9:00, 16:30]} |x(t) - y(t)|.$$

Sprawdzić, czy zbiór X wszystkich notowań w danym dniu wraz z funkcją d stanowi przestrzeń metryczną. Jeśli tak, to jak można w tej przestrzeni zinterpretować pojęcie kuli?

Zad 5. Niech X będzię siecią szlaków turystycznych w Tatrach. Niech $d(x, y)$ oznacza czas niezbędny do przejścia z punktu x do punktu y. Czy d jest metryką w X?

Zad 6. Niech X oznacza śródlądowy (rzeczny) system transportu wodnego. Czy koszt transportu $d(x, y)$ jednostki towaru z punktu x do punktu y jest metryką w zbiorze X?

Zad 7. Niech X oznacza zbiór przystanków lini autobusowej nr 8 w Białymstoku. Niech $d(x, y)$ oznacza cenę przejazdu z przystanku x do przystanku y. Sprawdzić, czy d jest metryką w X, jeśli tak, to wyznaczyć dla niej postać kul otwartych.

Zad 8. Pokazać, że dowolny zbiór X wraz z funkcją określoną wzorem

$$d_d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{gdy} \quad x = y, \\ 1, & \text{gdy} \quad x \neq y, \end{cases}$$

jest przestrzenią metryczną. Metrykę d_d nazywa się *metryka dyskretną* lub *zero-jedynkową*. Wyznaczyć postać kul otwartych, kul domkniętych oraz sfer w przestrzeni (X, d_d).